Copias sobre Espacios Métricos

Jose Franco

Contents

CHAPTER 1

Espacios Métricos

1. Definición y Ejemplos

El estudio de los espacios métricos parte de la definición de un conjunto cualquiera de puntos, digamos X, y un mapeo de este conjunto, llamémosle d, en los reales $\mathbf{R}$, que llamaremos función de distancia o métrica.

Este mapeo, debe cumplir ciertas propiedades. Intuitivamente, podríamos decir que la distancia de un punto x a uno y, es la misma que del punto y al punto x, y esta distancia tiene un valor no negativo, por otra parte, podemos decir que la distancia x a si mismo, es cero, y si la distancia de un punto a otro es cero, este punto debiera ser el mismo. Este tipo de razonamientos, son los que dan pie para la siguiente

Definition 1. *(Espacios Métricos) Sea X un conjunto y d una función de distancia definida en X, tal que* $d : X \longrightarrow \boldsymbol{R}^{+} \bigcup \{0\}$ *y d cumple, para todo* $x, y, z \in \boldsymbol{R}$, *con*

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = 0$ *si y solo si* $x=y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

entonces, decimos de (X,d) que es un ***espacio métrico***

Podemos ver en estas condiciones que se le han exigido a la métrica, que se encuentran formalizadas los conceptos que intuitivamente habíamos establecido al inicio de esta sección. Esto sucede muy regularmente en matemática, las definiciones no parten de un caso hipotético sin bases ya estudiadas previamente, sino que generalmente son formalizaciones de casos particulares.

Veremos algunos ejemplos importantes de espacios métricos y también veremos que en algunos casos se pueden definir más de una métrica sobre un mismo espacio.

Example 1. *(Línea Real) Sea X =* $(\boldsymbol{R},d)$ *la línea real, con la función de distancia definida como* $d(x,y)=|x-y|$. *Podemos ver que las condiciones (1), (2) y (3) se verifican inmediatamente, por otra parte, la condición (4) se convierte en igualdad si y se encuentra dentro del segmento xz, de lo contrario, la desigualdad es estricta. Esto se demustra haciendo* $|x-z|=|x-y+y-z|\leq|x-y|+|y-z|$.

Example 2. *(*$\boldsymbol{R}^n$ *y* $\boldsymbol{C}^n$ *) Sea X = (*$\boldsymbol{K}^n$*,d) el plano real (o complejo), con la función de distancia definida como*

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \eta_i)^2} \tag{1.1}$$

donde $x=(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ *e* $y=(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$. *Aquí, nuevamente, podemos ver que las condiciones (1) y (3) son inmediatas. Para la condición (2), es inmediato que si x=y, entonces d(x,y)=0, por otra parte, si d(x,y)=0, significa que toda diferencia* $\xi_i - \eta_i = 0$. *Pues la suma de los cuadrados es cero, por lo tanto* $\xi_i = \eta_i$ *de forma que x=y. La condición (4) se verá que se cumple en el ejemplo siguiente, al demostrar algunas desigualdades de particular importancia.*

Example 3. *(Espacio* l^p*, espacio de Hilbert* l^2*) Este ejemplo es de trascendental importancia en el estudio del análisis funcional, repasar el ejemplo en varias ocasiones, hasta comprenderlo lo mejor posible. Sea X=(X,d), donde X es el conjunto de las sucesiones de números reales o* *complejos, $x=(\xi_i)$, tales que para un número real $p\geq 1$ fijo, cumple con*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty \tag{1.2}$$

es decir, que esta suma converge, y la función de distancia d es de la forma,

$$d(x,y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p} \tag{1.3}$$

donde $y=(\eta_i)\in X$. Tenemos ahora que demostrar que la ecuación (1.3) define una métrica sobre X. Como ya hemos notado (1), (2) y (3) se ven inmediatamente, desde la definición de la función de distancia, para demostrar (4), veremos algunas desigualdades importantes.

2. Desigualdades (Cauchy, Hölder y Minkowski)

Las demostraciones en esta sección, se salen un poco, quizás, de nuestros objetivos de estudio, pero no, por ese motivo, son menos interesantes. Iniciamos verificando desigualdades básicas, pervias a las desigualdades que nos serán de utilidad para el estudio que nos concierne.

Sean a y b reales positivos, entonces $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, de donde obtenemos

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \tag{2.1}$$

Esta desigualdad es válida para todos los reales mayores que cero. Si hacemos $a = a_1a_2$ y $b = a_3a_4$ y les aplicamos la desigualdad anterior, obtendríamos,

$$a_1a_2a_3a_4 \leq \frac{a_1^2a_2^2 + a_3^2a_4^2}{2} \leq \frac{a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4}{4}$$

y por inducción podemos conluir que se obtiene, para $m = 2^n$, para algún n entero,

$$a_1a_2...a_m \leq \frac{a_1^m + a_2^m + ... + a_m^m}{m}$$

por lo tanto, podemos hacer $a_i = \sqrt[m]{b_i}$, de lo que obtenemos que

$$\sqrt[m]{b_1b_2...b_m} \leq \frac{b_1 + b_2 + ... + b_m}{m}$$

Ahora nos queda, demostrar que esta desigualdad cumple para toda m, no necesariamente de la forma $m = 2^n$.

Entonces démonos un m tal que no exista n que satisfaga $m = 2^n$, y nos damos n de tal forma que $2^{n-1} < m < 2^n$. Entonces, asignamos $b_i = a_i$ para todo $i \leq m$ y

$$b_i = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_m}{m}$$

para $i = m+1, m+2, ..., 2^n$ y aplicamos la desigualdad anterior y obtenemos la desigualdad que deseábamos. Resumimos este trabajo en el siguiente,

Lemma 1. *(Media aritmética y media geométrica) Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ reales cualesquiera, entonces la media geométrica es menor o igual que la media aritmética. Es decir,*

$$\sqrt[n]{b_1b_2...b_n} \leq \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n}$$

Ahora, procederemos a probar la desigualdad de Hölder. Para estas desigualdades volveremos al espacio l^p, que es la razón por la que deseamos completar estas demostraciones. Sea $p > 1$ y sea q tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

de aquí, podemos obtener las siguientes ecuaciones,

$$1 = \frac{p+q}{pq}, \qquad pq = p+q, \qquad (p-1)(q-1) = 1, \qquad (p-1) = \frac{1}{(q-1)}$$

Por lo que,

$$u = t^{p-1} \quad implica \quad t = u^{q-1}$$

Démonos ahora dos números reales cualesquiera α, β. Por integración podemos obtener la siguiente desigualdad,

$$\alpha\beta \leq \int_0^\alpha t^{p-1}dt + \int_0^\beta u^{q-1}du = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

Por otra parte, sean $\left(\hat{\xi}_i\right)$ y $(\hat{\eta}_i)$ tales que

$$\sum |\hat{\xi}_i|^p = 1 \qquad y \qquad \sum |\hat{\eta}_i|^p = 1$$

Si hacemos $\alpha = |\hat{\xi}_i|$ y $\beta = |\hat{\eta}_i|$ entonces de la desigualdad anterior obtenemos

$$|\hat{\xi}_i||\hat{\eta}_i| \leq \frac{|\hat{\xi}_i|^p}{p} + \frac{|\hat{\eta}_i|^q}{q}$$

De esta desigualdad obtenemos sumando que,

$$\sum |\hat{\xi}_i\hat{\eta}_i| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{2.2}$$

Ahora tomamos cualquier $x = (\xi_i) \in l^p$ e $y = (\eta_i) \in l^p$ y hacemos

$$\hat{\xi}_i = \frac{\xi_i}{\left(\sum |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \qquad y \qquad \hat{\eta}_i = \frac{\eta_i}{\left(\sum |\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Estos $\hat{\xi}_i$, $\hat{\eta}_i$, cumplen, por su definición con que la suma es uno, y si los sustituimos en la desigualdad (2.2), obtenemos la

Desigualdad de Hölder:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i\eta_i| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^q\right)^{1/q} \tag{2.3}$$

Ahora hacemos $p = q = 2$ con lo que se satisface la condición que la suma de los inversos es uno, por lo tanto obtenemos así la

Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i\eta_i| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^2} \tag{2.4}$$

Ya solo nos queda la desigualdad de Minkowski, para esto notemos que $(p-1)q = p$ entonces, podemos hacer $(\xi_i + \eta_i)^p = (\xi_i + \eta_i)(\xi_i + \eta_i)^{p/q} = \xi_i (\xi_i + \eta_i)^{p/q} + \eta_i (\xi_i + \eta_i)^{p/q}$ entonces sumaremos esto obteniendo,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i (\xi_i + \eta_i)^{p/q} + \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i (\xi_i + \eta_i)^{p/q}$$

Al lado derecho aplicamos la desigualdad de Hölder, obteniendo,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i|\xi_i + \eta_i|^{p/q} + \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i|\xi_i + \eta_i|^{p/q} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{1/q} \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p}\right)$$

De donde se obtiene la

Desigualdad de Minkowski:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p} \tag{2.5}$$

3. Algunos Elementos Topológicos

Aquí iniciamos el estudio de las propiedades topológicas de los espacios métricos, estas propiedades nos serán de suma importancia en el resto de nuestro estudio. Para adentrarnos en materia, iniciaremos con la siguiente

Definition 2. *(Bolas) Sea $x \in X$ espacio métrico y sea $\epsilon > 0$ un número real fijo. Entonces al conjunto $B(x, \epsilon) = \{y \mid d(x, y) < \epsilon\}$ le llamaremos* ***bola abierta de radio épsilon y centro en*** *x, al conjunto $\bar{B}(x, \epsilon) = \{y \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$ le llamaremos* ***bola cerrada de radio épsilon y centro en*** *x y al conjunto $S(x, \epsilon) = \{y \mid d(x, y) = \epsilon\}$ le llamaremos la* ***circunferencia de radio épsilon y centro*** *x*

Una situación interesante de mencionar, es que para cada espacio, se pueden definir más de una métrica. Por ejemplo para el caso R^n se puede utilizar la métrica euclidiana, definida en Ejemplo.2, pero de la misma forma, se puede definir para $x, y \in \mathbf{R}^n$,

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|$$

y esta métrica se conoce como la métrica del taxi. Otra métrica que se puede definir es,

$$d_\infty(x, y) = \sup_{i=1,\ldots,n} |\xi_i - \eta_i|$$

para $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in \mathbf{R}^n$.

Tomemos ahora $x = 0$ y $\epsilon = 1$ y trazamos las bolas con cada una de las métricas, comenzaremos a ver que el concepto de bola no es tan particular como creíamos, sino es un poco más general.

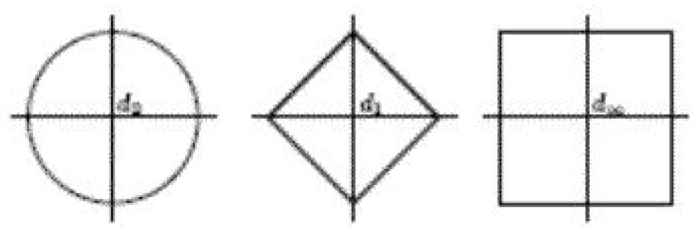

Figure 1. Bolas en $\mathbf{R}^2$ para las distintas métricas definidas

Ahora, si consideramos que los espacios son cualesquiera, digamos el espacio de las sucesiones l^p, entonces el concepto de bola ya no tiene una interpretación geométrica como habríamos querido.

Esta simple definición, nos ha abierto muchas posibilidades, entre estas estará una de las definiciones más trascendentales de la topología de los espacios métricos.

Definition 3. *(Conjuntos abiertos) Sea $M \subset X$ un subconjunto del espacio métrico X tal que para todo $m \in M$ existe una bola abierta que contiene a m, entonces decimos que M es un subconjunto abierto de X.*

Definition 4. *(Conjuntos cerrados) Sea $K \subset X$ un subconjunto del espacio métrico X, decimos que K es cerrado si el complemento K^c de K, es abierto.*

Una vez hemos definido los espacios abiertos y cerrados, podemos hacer una definición más importante, que será la definición de topología.

Definition 5. *(Topología) Sea X un conjunto cualquiera y sea $\Im$ una familia de conjuntos que llamaremos abiertos A. Entonces,*

(1) $\phi \in \Im$, $X \in \Im$
(2) $\bigcup_{i \in I} A_i \in \Im$, *donde* $A_i \in \Im$
(3) $A, B \in \Im \Rightarrow A \cap B \in \Im$

Entonces $(X, \Im)$ *es un* ***espacio topológico***.

THEOREM 1. *(Topología inducida) Sea* (X, d) *un espacio métrico, con sus abiertos según la definición 3. Sea* $\Im$ *el conjunto de todos abiertos en* X*, entonces* $(X, \Im)$ *es el espacio topológico inducido por el espacio topológico.*

PROOF. Por vacuidad ϕ es abierto y por definición X es abierto, por lo tanto ambos están en $\Im$. Sea $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ entonces $a \in A_i$ para al menos una $i \in I$, que es un elemento abierto, por lo tanto existe una bola abierta contenida que contiene a x en A_i, por lo tanto esta bola está contenida en $\bigcup_{i \in I} A_i$, por lo tanto $\bigcup_{i \in I} A_i$ es abierto, pues x es un elemento arbitrario.

Finalmente, sean A,B abiertos y démonos un $x \in A \cap B$ debido a que $x \in A$ y $x \in B$ y ambos son abiertos, existe una bola de radio ϵ contenida en A que contiene a x, por otra parte, existe una bola de radio δ contenida en B, tomemos estas bolas concéntricas y la bola de radio menor estará contenida en $A \cap B$, puesto que x es arbitrario, $A \cap B$ es abierto.

Por lo tanto, **todo espacio métrico es un espacio topológico.** □

Otra definición importante que nos será de utilidad en lo subsiguiente, es la definición de mapeo. Esta, es la base de múltiples transformaciones de importancia en nuestro estudio. De hecho, la base del análisis funcional, es el estudio de mapeos de espacios vectoriales en el campo del espacio, esto lo veremos a detalle más adelante, de momento nos contentaremos con la siguiente,

DEFINITION 6. *(Mapeo continuo) Sean* $X = (X, d)$ *y* $Y = (Y, \hat{d})$ *espacios métricos cualesquiera, sea* $x_0 \in X$ *un punto en X, sea* $T : X \longrightarrow Y$ *un mapeo tal que para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in X$ *que* $d(x, x_0) < \delta$ *entonces* $\hat{d}(Tx, Tx_0) < \epsilon$*, entonces decimos que* T ***es un mapeo continuo en*** x_0.

Si T *es continuo para todo* $x \in X$ *entonces* T *es continuo (en* X*).*

THEOREM 2. *(Imagen inversa de un abierto) Sean* $X = (X, d)$ *y* $Y = (Y, \hat{d})$ *espacios métricos, entonces el mapeo* $T : X \longrightarrow Y$ *es continuo si y solo si la imagen inversa e cualquier abierto en* Y *es abierta en* X*.*

PROOF. Para demostrar la implicación, decimos que T es un mapeo continuo, entonces démonos abierto en Y, digamos A. Sabemos que para un punto cualquiera $y_0 \in A$ existe una bola de radio épsilon contenida en A que contiene a y_0, es decir que para toda y tal que $d(y, y_0) < \epsilon$ entonces $y \in A$, pero estos puntos son mapeados en una bola de radio delta en X, por lo tanto, la imagen inversa de A es un entorno de todos sus puntos, por lo tanto es abierta.

Si la imagen inversa de un abierto en Y es un abierto en X, bajo T, entonces T transforma bolas abiertas en bolas abiertas, por lo tanto, considerando las bolas como en la parte inicial de la prueba, es inmediato que T es continuo. □

DEFINITION 7. *(Puntos de acumulación) Sea* $x_0 \in X$ *un punto en el espacio métrico* X *y sea* $M \subset X$ *un subconjunto de* X*. Si para toda* ϵ*-vecindad de* x_0*,* Vx_0 *existe al menos un elemento* $y \neq x_0$ *tal que* $y \in M \cap Vx_0$ *entonces* x_0 ***es punto de acumulación de*** M*.*

DEFINITION 8. *(Cerradura de M) Sea* X *un espacio métrico y sea* $M \subset X$ *un subconjunto de* X*, entonces llamamos al conjunto de todos los puntos de acumulación de* M*,* ***la cerradura de*** M *y lo denotamos por* $\bar{M}$ *.*

Ahora que hemos definido la cerradura de un conjunto, podemos llegar a una importante definición y esta es la densidad de un conjunto. Un subconjunto de un espacio métrico, es denso en el espacio métrico, si su cerradura es todo el espacio métrico. Un ejemplo de esto son los números racionales, que son densos en los números reales. Por otra parte, un espacio métrico es separable si posee un subconjunto contable que sea denso en el espacio. Ejemplo de esto, nuevamente, son los reales, pues los racionales son un conjunto denso, contable en $\mathbf{R}$.

4. Sucesiones

En el estudio del análisis funcional, las sucesiones juegan un rol particularmente importante, pues sobre estas se basa la completitud de un espacio, que es de particular importancia, pues como se verá a continuación, los espacios completos, son mejor portados que los que no lo son.

Definition 9. *(Límite de una sucesión) Sea (X,d) un espacio métrico cualquiera. Una sucesión (x_n) es convergente si existe $x \in X$ tal que,*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

*x se llama el **límite de** (x_n) y decimos que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

De esta definición desprenderemos el siguiente lema, cuya demostración se dejará al lector.

Lemma 2. *(acotación, límite) Sea $X = (X,d)$ un espacio métrico, entonces:*
(1) *Una sucesión convergente es acotada y su límite es único.*
(2) *Si $x_n \to x$, así como, $y_n \to y$ entonces $d(x_n, y_n) \to d(x,y)$*

Ahora plantearemos una definición muy importante, en análisis real y complejo, se ha considerado esta definición, una definición paralela a la definición de una sucesión convergente, no obstante, en análisis funcional, esto no es cierto, como veremos a continuación,

Definition 10. *(Sucesión de Cauchy) Sea $X = (X,d)$ un espacio métrico, sea (x_n) una sucesión tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un N entero tal que para $n,m > N$ entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Decimos que la sucesión (x_n) es de Cauchy.*

De acuerdo a nuestra costumbre del análisis real, seguiríamos con que una sucesión es convergente si y solo si es de Cauchy, pero esto es cierto, si y solo si el espacio es completo.

Definition 11. *(Espacio completo) Sea $X = (X,d)$ un espacio métrico. Si toda sucesión de Cauchy en X es convergente, entonces, $X = (X,d)$ es un espacio métrico completo.*

Theorem 3. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

Proof. Sea X un espacio métrico y (x_n) una sucesión convergente, entonces nos damos un $\epsilon > 0$ arbitrario, entonces, para existe un N tal que para $n,m > N$, $d(x_n,x) < \epsilon/2$ y $d(x_m,x) < \epsilon/2$, utilizamos la desigualdad del triángulo $d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x) + d(x_m,x) < \epsilon$, por lo tanto (x_n) es de Cauchy. $\square$

Cabe notar, que el recíproco de este teorema es cierto, solo si el espacio métrico es completo. De lo contrario, el recíproco es falso.

Theorem 4. *Sea $M \neq \phi$, $M \subset X$ un subconjunto del espacio métrico X y $\bar{M}$ su cerradura, entonces:*
(1) *$x \in \bar{M}$ si y solo si existe una sucesión no constante $(x_n) \subset M$ tal que $x_n \to x$*
(2) *M es cerrado si y solo si $x_n \in M$ y $x_n \to x$ entonces $x \in M$ (Es decir, M es cerrado si y solo si contiene todos sus puntos de acumulación)*

Proof. Separemos la prueba por incisos:
(1) Supongamos que $x \in \bar{M}$ entonces, nos damos una bola abierta cualquiera de x con radio $\epsilon_i > 0$, digamos $B_i(x)$ entonces por estar x en la cerradura de M existe $x_i \in B_i(x)$ así como, $x_i \in M$, si $d(x,x_i) < \epsilon_i$ entonces tomamos un $0 < \epsilon_{i+1} < \epsilon_i$ debe existir un x_{i+1} tal que cumpla con estar en la bola de radio ϵ_{i+1} y que sea distinto de x de esta forma, hacemos una sucesión de elementos que convergen a x.
    El recíproco, se demuestra sabiendo que si existe una sucesión no constante $(x_n) \subset M$ tal que $x_n \to x$, sabemos que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un elemento x_i tal que $d(x_i,x) < \epsilon$, por lo tanto en cualquier bola de radio arbitrario hay un elemento de M distinto de x, por lo tanto, x es punto de acumulación de M y está contenido en la cerradura $\bar{M}$.
(2) Supongamos que para toda sucesión $\{x_n\} \subset M$, tal que $x_n \to x$ entonces $x \in M$, entonces $x \in \bar{M}$ por el inciso anterior, nos damos entonces un punto en el complemento de M, es decir $y \in M^c$, suponemos que toda bola $B(y,\epsilon)$ tiene elementos de M, pero de esta forma y sería punto de acumulación de M y por ende estaría en M, por lo tanto, debe haber una bola $B(y,\epsilon)$ para algún ϵ que no contiene puntos de M es decir que

es interior a M^c por lo tanto M^c es abierto, pues y es arbitrario de modo que M es cerrado.

Recíprocamente, consideramos que M es cerrado, démonos una sucesión arbitraria $\{x_n\} \subset M$ tal que $x_n \to x$, si $x \notin M$ entonces debe existir una bola $B(x, \epsilon) \subset M^c$, pues M^c es abierto, pero esto contradice que pueda existir una sucesión en M que converja a x, por lo tanto, si existe dicha sucesión, entonces, necesariamente $x \in M$.

Queda demostrado entonces que la cerradura de un conjunto es un conjunto cerrado y que un conjunto es cerrado si y solo si, contiene todos sus puntos de acumulación. □

Theorem 5. *Sea X un espacio métrico completo y sea $M \subset X$ un subespacio. Entonces M es completo si y solo si M es cerrado.*

Proof. Supongamos que M es completo, entonces toda sucesión de Cauchy $\{x_n\} \subset M$ converge, por lo tanto existe $x \in M$ tal que $x_n \to x$, por el teorema anterior, M es cerrado.

Recíprocamente, M es cerrado, entonces nos damos una sucesión de Cauchy $\{x_n\} \subset M \subset X$, por ser X completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$, por teorema anterior, necesariamente $x \in M$ por lo tanto M es completo. □

Theorem 6. *Un mapeo $T : X \to Y$ de un espacio métrico $X = (X, d)$ en un espacio métrico $Y = (Y, \bar{d})$ es continuo en un punto $x_0 \in X$ si y solo si $x_n \to x_0$ implica $Tx_n \to Tx_0$*

Proof. Supongamos que $T : X \to Y$ es un mapeo continuo en $x_0 \in X$, démonos una sucesión (x_n) tal que $x_n \to x_0$, si hacemos una sucesión (Tx_n) de las imágenes, dado que T es continuo entonces para $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x_n, x_0) < \delta$ entonces $\bar{d}(Tx_n, Tx_0) < \epsilon$, es inmediato que para $i > n$, $\bar{d}(Tx_i, Tx_0) < \epsilon$, pues $d(x_i, x_0) < \delta$, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \bar{d}(Tx_n, Tx_0) = 0$$

por lo tanto tenemos que $Tx_n \to Tx_0$.

Por otra parte, para probar el recíproco, suponemos que para cualquier sucesión (x_n) tal que $x_n \to x_0$ entonces la sucesión de las imágenes bajo el mapeo T, (Tx_n) cumple con que $Tx_n \to Tx_0$.

Supongamos que T no es continuo, entonces podemos darnos un número $\delta > 0$ tal que para cualquier $\epsilon > 0$ suceda que $d(x_n, x_0) < \delta$, implique que $\bar{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \epsilon$, esto significaría que (Tx_n) no converge a Tx_0 contradiciendo la hipótesis, por lo tanto T debe ser continuo.

□

Ahora nos interesaremos en un tipo especial de mapeos, este tipo de mapeos, que conservan alguna propiedad fundamental del espacio donde está contenido su dominio, en su imagen, son de trascendental importancia en matemática. En este caso particular, en el que estamos frente a un espacio métrico, un mapeo que conserve la métrica, es de gran importancia. De esta línea de ideas parte nuestra

Definition 12. *(Mapeo isométrico, Espacios isométricos) Sean $X = (X, d), Y = (Y, \bar{d})$ espacios métricos.*

(1) *Un mapeo $T : X \to Y$ es isométrico o una isometría si T conserva las distancias, es decir que para todo $x, \bar{x} \in X$*

$$d(x, \bar{x}) = \bar{d}(Tx, T\bar{x})$$

donde $Tx, T\bar{x}$ son las imágenes bajo T de $x, \bar{x} \in X$ y $\bar{d}$ es la distancia en Y.

(2) *El espacio X es isométrico al espacio Y si existe una isometría biyectiva $T : X \to Y$.*

De esta cuenta, vemos que dos espacios métricos pueden diferir en la naturaleza de sus puntos, pero ser idénticos desde el punto de vista de una métrica. Ahora, el objetivo de esta definición, se halla en el siguiente teorema, que es la culminación de nuestro estudio de los espacios métricos.

Theorem 7. *Para un espacio métrico $X = (X, d)$ existe un espacio métrico* ***completo*** *$\tilde{X} = (\tilde{X}, \tilde{d})$, con un subespacio W isométrico a X, que es denso en $\tilde{X}$. Este espacio es único excepto isometrías.*